Lycée pilote de Tunis	***Nombres Complexes - 2***	***Terminales maths***
Mr.Ben Regaya	***Eléments de corrections***	*www.ben-regaya.net*

Exercice 1

On a : $IM=|z_M-z_I|=|sin\theta+i(1-cos\theta)-i|=|sin\theta-icos\theta|=1$.

On a aussi $z_M-z_I=sin\theta+i(1-cos\theta)-i=-i(cos\theta+isin\theta)$

Donc $(\vec{u},\overrightarrow{IM})\equiv arg(z_M-z_I)[2\pi]\Rightarrow(\vec{u},\overrightarrow{IM})\equiv arg(-i(cos\theta+isin\theta))[2\pi]$

$\Rightarrow(\vec{u},\overrightarrow{IM})\equiv arg(-i)+arg(cos\theta+isin\theta)[2\pi]\Rightarrow(\vec{u},\overrightarrow{IM})\equiv-\frac{\pi}{2}+\theta[2\pi]$

Comme θ décrit $\mathbb{R}$ alors $-\frac{\pi}{2}+\theta$ décrit aussi $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon 1.

Exercice 2

1. construction facile **.**
2. $M(z)\in(C)\Leftrightarrow AM=1\Leftrightarrow|z-1|=1\Leftrightarrow(z-1)(\bar{z}-1)=1\Leftrightarrow z\bar{z}+1-\bar{z}-z=1\Leftrightarrow|z|^2-(z+\bar{z})=0$

Exercice 3

1. a) Pour $z\neq1$, $|z'|=\left|\frac{z-1}{\bar{z}-1}\right|=\frac{|z-1|}{|\bar{z}-1|}=\frac{|z-1|}{|\overline{z-1}|}=\frac{|z-1|}{|z-1|}=1$.

   b) $|z'|=1$signifie $OM'=1$ et donc le point M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

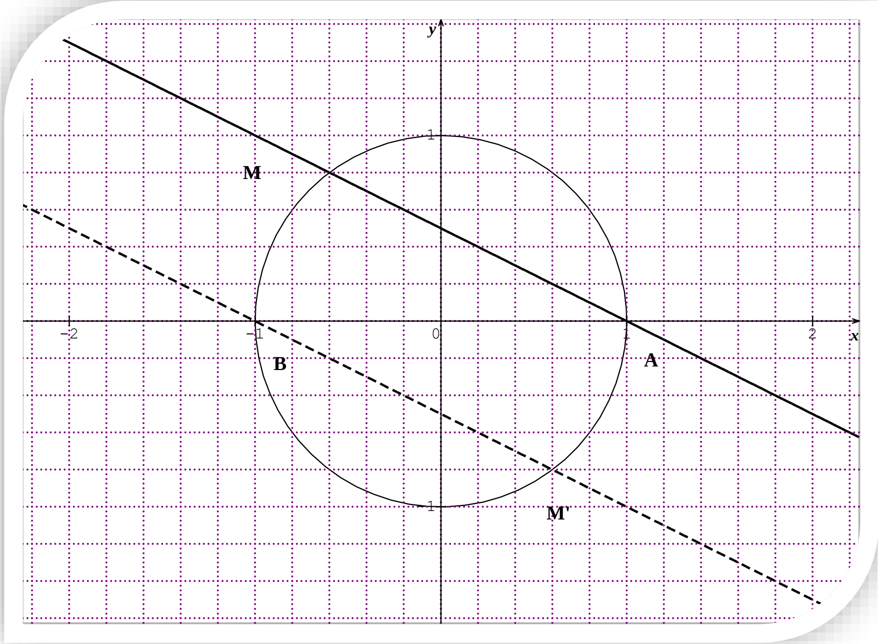
2. $r=\frac{z'+1}{z-1}=\frac{\frac{z-1}{\bar{z}-1}+1}{z-1}=\frac{\frac{z-1+\bar{z}-1}{\bar{z}-1}}{z-1}=\frac{z+\bar{z}-2}{(\bar{z}-1)(z-1)}$.

   Déduction : On a $r=\frac{z+\bar{z}-2}{(\bar{z}-1)(z-1)}=\frac{z+\bar{z}-2}{(\overline{z-1})(z-1)}=\frac{2Re(z)-2}{|z-1|^2}$ et donc r est un réel.

3. Remarquons que $r=\frac{z'+1}{z-1}=\frac{aff(\overrightarrow{BM'})}{aff(\overrightarrow{AM})}$ qui est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

4. On sait d'après 1. que le point M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 de plus le fait que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires veut dire que pour M un point donné distinct de A, le point M' appartient a la droite parallèle a (AM) passante par B.

   D'où la construction de M' comme intersection d'un cercle et d'une droite.



Exercice 4

1. $f(a)=\dfrac{(3+4i)(1-2i)+4-8i}{5}=\dfrac{11-2i+4-8i}{5}=3-2i \Rightarrow A'(3,-2)$.
2. $f(z)=\dfrac{(3+4i)(x-iy)+4-8i}{5}=\dfrac{3x+4y+4+i(4x-3y-8)}{5}=\dfrac{3x+4y+4}{5}+i\dfrac{4x-3y-8}{5}$.
3. Deux complexes sont égaux signifie qu'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Dans notre cas

   $f(z)=z \Leftrightarrow \dfrac{3x+4y+4}{5}=x$ et $\dfrac{4x-3y-8}{5}=y \Leftrightarrow \dfrac{-2x+4y+4}{5}=0$ et $\dfrac{4x-8y-8}{5}=0 \Leftrightarrow$

   $-x+2y+2=0$ et $x-2y-2=0$ c'est la même équation.

   Δ est la droite dont une équation cartésienne est $x-2y-2=0$ ou encore $y=\dfrac{1}{2}x-1$.

4. La médiatrice du segment $[AA']$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AA'}$ qui a pour composantes $(2,-4)$ donc une équation de cette droite est : $2x-4y+c=0$ et elle passe par le milieu de $[AA']$ qui a pour coordonnées $(2,0)$. Ainsi $2\times 0-4\times 0+c=0 \Leftrightarrow c=-2$ et donc une équation de cette médiatrice est $2x-4y-2=0$ ou encore $x-2y-2=0$. c'est le résultat souhaiter.

Exercice 5

1. a) Montrons que A appartient au cercle (C).

   On a $|a|=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$ donc $OA=1$ et $A\in(C)$.

   b) Pour placer le point A, il suffit de remarquer que l'abscisse de A est égale à 1 donc A appartient à la droite d'équation $x=1$ On sait aussi que A est un point de (C).Ainsi A est le point d'intersection de (C) et de la droite $x=1$ et il faut pas oublier que l'ordonnée de A est positive.

2. a) Soit K milieu du segment $[M_1M_2]$. L'affixe du point K est

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{\sqrt{3}\left[-1+i\left(1-\sqrt{2}\right)\right]+\sqrt{3}\left[1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right]}{2}=i\sqrt{3}$$. Ainsi l'affixe du point K est $i\sqrt{3}$.

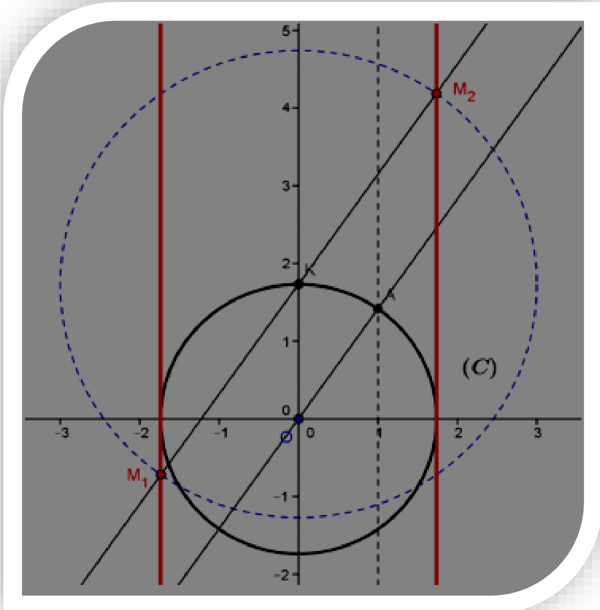
b) Vérifions que $\frac{z_2-z_1}{a}=2\sqrt{3}$.

$$\frac{z_2-z_1}{a}=\frac{\sqrt{3}\left[-1+i\left(1-\sqrt{2}\right)\right]-\sqrt{3}\left[1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right]}{1+i\sqrt{2}}=$$

$$\frac{2\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)}{1+i\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)}{3}=\frac{2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)}{3}=\frac{2\sqrt{3}\left|1+i\sqrt{2}\right|^2}{3}=2\sqrt{3}.$$

Déduction :

On a $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et donc la droite (M_1M_2) est parallèle à la droite (OA).



c) $M_1M_2=\left|z_2-z_1\right|=2\sqrt{3}\left|1+i\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$.

d) Les points M_1 et M_2 appartiennent a la droite parallèle à (OA) passant par K et le cercle de centre K et de rayon 3.

Exercice 6

1. $OM'=OM''\Leftrightarrow\left|-im-1\right|=\left|m+i\right|\Leftrightarrow\sqrt{(-im-1)\left(i\overline{m}-1\right)}=\sqrt{(m+i)\left(\overline{m}-i\right)}$ rappelons que $|z|=\sqrt{z\times\overline{z}}$

   $\Leftrightarrow(-im-1)\left(i\overline{m}-1\right)=(m+i)\left(\overline{m}-i\right)\Leftrightarrow m\overline{m}-i\overline{m}+im+1=m\overline{m}+i\overline{m}-im+1$

   $\Leftrightarrow-2i\overline{m}+2im=0\Leftrightarrow-\overline{m}+m=0\Leftrightarrow\overline{m}=m$ et cette égalité veut tout simplement dire que m est réel et donc l'ensemble Δ est la droite des réels.

2. a) On a $z''=i+m\Leftrightarrow z''-i=m$ et donc $\left|z''-i\right|=|m|=\sqrt{2}$ ou encore $AM''=\sqrt{2}$ donc le point M'' appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

   b) on a : $z'=-im-1\Leftrightarrow z'+1=-im\Rightarrow arg\left(z'+1\right)\equiv arg\left(-im\right)[2\pi]$ qui s'écrit aussi

   $arg\left(z'-(-1)\right)\equiv-\frac{\pi}{2}+arg\left(m\right)[2\pi]$ ou encore $\left(\vec{u},\overrightarrow{KM'}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$, K étant le point d'affixe -1.

   Ainsi M' appartient à la demi-droite d'équation $\begin{cases}y=-x-1\\ x\succ-1\end{cases}$.

3. a) $|m|=1$ donc le point M est un point du cercle trigonométrique. Ce cercle étant de diamètre $[AB]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux et par suite le triangle AMB est rectangle en M.

   b) Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux donc le rapport $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{AM}\right)}{aff\left(\overrightarrow{BM}\right)}$ est imaginaire pur et par suite le rapport $i\times\dfrac{aff\left(\overrightarrow{AM}\right)}{aff\left(\overrightarrow{BM}\right)}$ est réel. Or $i\times\dfrac{aff\left(\overrightarrow{AM}\right)}{aff\left(\overrightarrow{BM}\right)}=i\times\dfrac{m-i}{m+i}=\dfrac{im+1}{m+i}$. C'est le résultat souhaité.

Exercice 7

1. a) Montrons que le point B appartient au cercle (C).

$AB=\left|z_B-z_A\right|=\left|1+2\sqrt{2}+i\left(2\sqrt{2}-1\right)-1+i\right|=\left|2\sqrt{2}+i\left(2\sqrt{2}\right)\right|=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4$ et donc B appartient au cercle (C).

b) Montrons que le complexe $\dfrac{b-a}{a}$ est imaginaire pur.

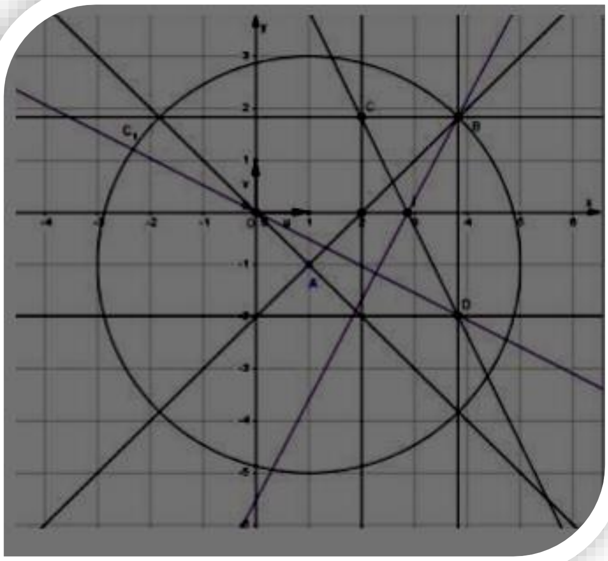
$\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}+i\left(2\sqrt{2}\right)}{1-i}=2\sqrt{2}\times\dfrac{1+i}{1-i}=2\sqrt{2}\times\dfrac{(1+i)^2}{2}=2\sqrt{2}\,i$ qui est un imaginaire pur.

c) Construction de B :

On sait que B appartient au cercle (C).

Et l'expression $\dfrac{b-a}{a}$ est imaginaire pur se traduit par : $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{AB}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}$ est imaginaire pur ce qui veut dire que

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OA}$ et donc B est un point de la droite perpendiculaire à la droite (OA) passant par A.



B est donc le point d'intersection d'ordonnée positive du cercle (C) et de la droite perpendiculaire à (OA) passant par A.

Construction de C :

$x_C=2$ et $y_C=y_B$ ce qui permet de construire C.

Construction de D :

On a : $x_D=x_B$ et $y_D=-2$ ce qui permet de construire D.

2. a) $\dfrac{d-c}{b}=\dfrac{1+2\sqrt{2}-2i-\left(2+i\left(2\sqrt{2}-1\right)\right)}{1+2\sqrt{2}+i\left(2\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{2\sqrt{2}-1-i\left(2\sqrt{2}+1\right)}{1+2\sqrt{2}+i\left(2\sqrt{2}-1\right)}=-i\dfrac{2\sqrt{2}+1+i\left(2\sqrt{2}-1\right)}{1+2\sqrt{2}+i\left(2\sqrt{2}-1\right)}=-i$

b) L'égalité $\dfrac{d-c}{b}=-i$ se traduit par $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{CD}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OB}\right)}$ est imaginaire pur ce qui veut dire que $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{OB}$ et donc la droite (DC) porte la hauteur issue de D dans le triangle ODC.

Aussi la droite $\left(O,\vec{u}\right)$ porte la hauteur issue de O dans le triangle ODC et comme $\left(O,\vec{u}\right)\cap(DC)=\{I\}$ alors I est l'orthocentre du triangle ODC. D'où (BI) porte la hauteur issue de B et donc (BI) est perpendiculaire à la droite (OD).