Lycée pilote de Tunis	**Produits scalaires 2**	**Troisièmes années**
Mr.Ben Regaya	**éléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice 1

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times cos\left(BAC\right) = 3\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$

Par le théorème d'El Kashi : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB\times AC\times cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 16+9-24\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 37$ et donc

$BC = \sqrt{37}$.

$AM^2 = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} = \left(3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).\left(3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right) = 9AB^2 - 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$

Donc $AM^2 = 81+18+18+16 = 133$ et donc $AM = \sqrt{133}$.

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$BM^2 = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BM} = \left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right) = 4AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$ terminer…

Exercice 2

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\right)\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right) = -\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{0} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DJ} + \underbrace{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DJ}}_{0} = AI\times AD - AB\times\left(\frac{1}{2}AB\right) = 0$ .Ainsi

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ} = 0$ et par suite $(BI)\perp(AJ)$.

Exercice 3

1. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) = \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA}}_{0} + \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AD}}_{0} + AD^2 = -\frac{1}{2}AB\times AB + 1 = -1$

2. On voit tout de suite par Pythagore que $AI = \sqrt{2}$ et que $BD = \sqrt{5}$ et on remarque aussi que les angles BOI et DOI sont supplémentaires donc $cos\left(BOI\right) = -cos\left(DOI\right)$

   On a : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = AI\times BD\times cos\left(DOI\right) = \sqrt{2}\times\sqrt{5}\times cos\left(DOI\right) = \sqrt{10}\times cos\left(DOI\right)$ et donc

   $cos\left(DOI\right) = \frac{-1}{\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ et donc $cos\left(BOI\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Exercice 4

1. $AM^2 = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = |x|^2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = x^2\times AB^2 = x^2\times a^2$

   On a $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (x-1)\overrightarrow{CA}$

   Et donc $AN^2 = \left\|\overrightarrow{AN}\right\|^2 = (x-1)^2 a^2$

   $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\right) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \left(x\overrightarrow{AB}\right).\left(x\overrightarrow{CA}\right)$

   $= x\times AB\times AC\times cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - x^2\times AB\times AC\times cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = xa^2\times\frac{1}{2} - x^2a^2\times\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}\left(x-x^2\right)$.

2. $MN^2 = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AN}\right\|^2 - 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = x^2a^2 + (x-1)^2a^2 - a^2\left(x-x^2\right)$

Ainsi $MN^2 = a^2\left[x^2+(x-1)^2-\left(x-x^2\right)\right] = a^2\left(3x^2-3x+1\right)$.

3. Remarquons que $3x^2-3x+1 = 3\left(x^2-x\right)+1 = 3\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+1 = 3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

   La valeur minimale de MN^2 est $\frac{1}{4}a^2$ et donc la valeur minimale de MN est $\frac{a}{2}$ obtenue lorsque $x=\frac{1}{2}$ c'est a dire M est le milieu de $[AB]$.

Exercice 5

Remarquons que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et donc $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MI} = 0$

Donc l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) = 0$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par I c'est donc la médiatrice de $[AB]$.

De même $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right) = 0$ signifie $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.2\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

Donc l'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[IJ]$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB} = 0$

Donc l'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (CB) passant par A.

$\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MC} = MA^2.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \left[\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)-MA^2\right]\times\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ **. Attention vecteur nul et non zéro.**

Rappelons le résultat suivant : $\alpha\,\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ **ou** $\vec{u} = \vec{0}$

Ainsi $\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)-MA^2 = 0$ **ou** $\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ **signifie** $\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} = 0$ **ou** $M = C$

signifie $\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right) = 0$ **ou** $M = C$ **signifie** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0$ **ou** $M = C$

Donc l'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A a laquelle on ajoute le point C.

Exercice 6

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AJ}\right) = \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}}_{0}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}+\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}}_{0} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$.

   $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HJ}\right) = \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IA}}_{0}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}+\underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HJ}}_{0} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$

2. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$

3. Remarquons que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{IJ}=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{IJ}=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AO}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC}=0$ et on voit donc que

$(OA)\perp(BC)$ et comme les droites (BC) et (IJ) sont parallèles alors $(OA)\perp(IJ)$.

Exercice 7

1. a) J le milieu de $[AC]$ et O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC donc $(OJ)\perp(AC)$ et par suite J est le projeté orthogonal de O sur (AC).

   Ainsi $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}CA^2=18$.

   b) $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CA}=18 \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{CO}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MC}=0$

   L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CA}=18$ est la droite perpendiculaire à (CA) passant par C.

2. a) Remarquons toujours que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OJ}$ et donc $\vec{u}=\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{OJ}$

   $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{AC}=\underbrace{\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}}_{0}+2\underbrace{\overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{AC}}_{0}=0$ puisque H l'orthocentre du triangle ABC

   b) On a aussi $\vec{u}=\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{HC}+2\overrightarrow{OI}$ et donc

   $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{HC}+2\overrightarrow{OI}\right).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}}_{0}+2\underbrace{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AB}}_{0}=0$

   c) Le vecteur $\vec{u}$ est forcément nul car si non et vu qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ alors les droites (AB) et (AC) seraient parallèles qui n'est pas le cas et donc $\vec{u}=\vec{O}$.

   $\vec{u}=\vec{O}$ donc $\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

   $\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OH} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}=\overrightarrow{OH} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$.

3. a) $MO^2-MG^2-5\,OG^2=MO^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OG}\right)^2-5\,OG^2=MO^2-\left(MO^2+OG^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OG}\right)-5\,OG^2$

   $=-6\,OG^2-2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OG}=-6\,\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG}.\left(-6\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{OM}\right)$.

   b) $MO^2-MG^2=5\,OG^2 \Leftrightarrow MO^2-MG^2-5\,OG^2=0$

   $\overrightarrow{OG}.\left(2\,\overrightarrow{OM}-6\overrightarrow{OG}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}.\left(2\,\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OH}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}.\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OH}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{HM}=0$.

   L'ensemble (Δ) est la droite perpendiculaire à la droite (OG) passant par H.

Exercice 8

1. Comme A est le projeté orthogonal de B sur (AC) alors $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2=9$.

   Déduction : On sait que $CB=\sqrt{AC^2+AB^2}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times cos\left(\widehat{BCA}\right)$.

   $\Rightarrow 15cos\left(\widehat{BCA}\right)=9$

   On en déduit donc que $cos\left(\widehat{BCA}\right)=\frac{3}{5}$.

2. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right).\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)==\left(\overrightarrow{AI}-\frac{\overrightarrow{CB}}{2}\right)\left(\overrightarrow{AI}+\frac{\overrightarrow{CB}}{2}\right)=AI^2-\frac{CB^2}{4}$

Déduction

Comme $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0$ par suite $AI^2=\frac{CB^2}{4}=\frac{AB^2+AC^2}{4}=\frac{25}{4}$. Finalement $AI=\frac{5}{2}$.

3. a) K le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,-4)$ donc $3\overrightarrow{KA}-4\overrightarrow{KB}=\vec{O}$ et on peut toujours écrire

$\overrightarrow{AK}=\frac{-4}{3-4}\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KB}=\frac{3}{3-4}\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AB}$.

On a donc $AK^2=16\times16=256$ et $BK^2=9\times16=144$.

$f(K)=3KA^2-4KB^2=192$.

b) $f(M)=3\overrightarrow{MA}^2-4\overrightarrow{MB}^2=3\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2-4\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2=f(K)-MK^2$

(Bien sur après développement et simplification).

c) $f(M)=128\Leftrightarrow f(K)-MK^2=128\Leftrightarrow MK^2=192-128=64\Leftrightarrow MK=8$. Ainsi l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=16$ est le cercle de centre K et de rayon 8.